Date

2008年　東大数学　文系 第4問 ①

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + pb_n & \text{—①} \quad a_1 = p \\ b_{n+1} = pa_n + (p+1)b_n & \text{—②} \quad b_1 = p+1 \end{cases}$$

(1) 以下、数学的帰納法で

漸化式 & 証明 ときたら 帰納法

$A_n = a_n - \frac{n(n-1)}{2}p^2 - np$

$B_n = b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$

が、p^3で割り切れることを示す。

(i) $A_1 = a_1 - \frac{1\times 0}{2}p^2 - 1\times p = 0$

$B_1 = b_1 - 1\times 0\times p^2 - 1\times p - 1 = 0$

なので、p^3で割り切れる。

(ii) A_k、B_kが p^3で割り切れると仮定する。

つまり

$A_k = a_k - \frac{k(k-1)}{2}p^2 - kp = Ap^3$ —③

$B_k = b_k - k(k-1)p^2 - kp - 1 = Bp^3$ —④

とおく　(A, Bは整数)

(iii) A_{k+1}、B_{k+1}が p^3で割り切れることを示す。

$A_{k+1} = a_{k+1} - \frac{k(k+1)}{2}p^2 - (k+1)p$　① より

$= a_k + pb_k - \frac{k(k+1)}{2}p^2 - (k+1)p$

③ ④

$= \left(Ap^3 + \frac{k(k-1)}{2}p^2 + kp\right) + p\left(Bp^3 + k(k-1)p^2 + kp + 1\right)$

$- \frac{k(k+1)}{2}p^2 - (k+1)p$

$= Ap^3 + Bp^4 + k(k-1)p^3$　◀ pの3次以上

$+ p^2\left(\frac{k(k-1)}{2} + k - \frac{k(k+1)}{2}\right) + p(k+1-k-1)$

2次　1次

$= p^3(A + Bp + k(k-1))$　よって A_{k+1}は p^3で割り切れる

2次と1次が消える

$B_{k+1} = b_{k+1} - k(k+1)p^2 - (k+1)p - 1$

$= pa_k + (p+1)b_k - k(k+1)p^2 - (k+1)p - 1$

③ ④

$= p\left(Ap^3 + \frac{k(k-1)}{2}p^2 + kp\right) + (p+1)\left(Bp^3 + k(k-1)p^2 + kp + 1\right)$

$- k(k+1)p^2 - (k+1)p - 1$

$= Ap^4 + \frac{k(k-1)}{2}p^3 + Bp^4 + k(k-1)p^3$　◀ 3次以上

$+ p^2\left(k + k + k(k-1) - k(k+1)\right) + p\left(1 + k - (k+1)\right) + 1 - 1$

2次　1次　0次

$= p^3\left(Ap + \frac{k(k-1)}{2} + Bp + k(k-1)\right)$

2次、1次、0次は消える。

$k(k-1)$は連続2整数の積なので、$\frac{k(k-1)}{2}$は整数。

よって B_{k+1}は p^3で割り切れる。

以上より、$n = 1, 2, 3 \cdots$で A_n、B_nが p^3で割り切れることが示された。

(2) (1)より A_nはp^3で割り切れるので、

A_pもp^3で割り切れる。

よって $A_p = a_p - \frac{p(p-1)}{2}\times p^2 - p\times p = A'p^3$ とおける。

(A'は整数)

$a_p = A'p^3 + \frac{p-1}{2}p^3 + p^2$

$= p^3\left(A' + \frac{p-1}{2}\right) + p^2$

pは3以上の奇数なので、$p-1$は偶数であり、

$\frac{p-1}{2}$は整数となる

よって $a_p = p^3 \times$ 整数 $+ p^2$ となり、

p^2で割り切れるが、p^3で割り切れない。

Date

2008年　東大数学　文系第4問 ②

(1) 別解

この形の2種混合の漸化式は、1種に統一すると、3項間漸化式になる。

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + p b_n \\ b_{n+1} = p a_n + (p+1) b_n \end{cases}$$

から、b_nを消去して、a_nだけの漸化式にすると、

上 $\Leftrightarrow p b_n = a_{n+1} - a_n \Leftrightarrow b_n = \frac{1}{p}(a_{n+1} - a_n)$ を代入して、

$$\frac{1}{p}(a_{n+2} - a_{n+1}) = p a_n + \frac{p+1}{p}(a_{n+1} - a_n)$$

$$\Leftrightarrow a_{n+2} = (p+2) a_{n+1} + (p^2 - p - 1) a_n$$

$A_n = a_n - \frac{n(n-1)}{2} p^2 - np$ が p^3で割り切れることを、数学的帰納法で示す。

3項間なので、3項間の帰納法を使う。

(i) $A_1 = a_1 - \frac{1 \times 0}{2} p^2 - 1 \times p$

$= p - 0 - p = 0$

$A_2 = a_2 - \frac{2 \times 1}{2} p^2 - 2p$

$= p^2 + 2p - p^2 - 2p = 0$

よって A_1 A_2 は p^3で割り切れる。

(ii) A_k、A_{k+1} が p^3で割り切れると仮定する。
つまり $A_k = \alpha p^3$ $A_{k+1} = \beta p^3$ とおく

$$A_{k+2} = a_{k+2} - \frac{(k+2)(k+1)}{2} p^2 - (k+2)p$$

$$= (p+2) a_{k+1} + (p^2 - p - 1) a_k - \frac{(k+2)(k+1)}{2} p^2 - (k+2)p$$

$$= (p+2)\left\{A_{k+1} + \frac{k(k+1)}{2} p^2 + (k+1)p\right\}$$

$$+ (p^2 - p - 1)\left\{A_k + \frac{k(k-1)}{2} p^2 + kp\right\}$$

$$- \frac{(k+2)(k+1)}{2} p^2 - (k+2)p$$

これをひたすら計算すると…

$$= \cdots\cdots = (p+2) A_{k+1} + (p^2 - p - 1) A_k + \frac{k(k-1)}{2} p^4$$

$$= (p+2) \alpha p^3 + (p^2 - p - 1) \beta p^3 + \frac{k(k-1)}{2} p^4$$

$k(k-1)$ は、連続2整数の積なので、偶数。よって、$\frac{k(k-1)}{2}$ は整数。

p^3でくくり

$$p^3 \left\{(p+2)\alpha + (p^2 - p - 1)\beta + \frac{k(k-1)}{2} p\right\}$$

となるので、p^3 で割り切れる。

以上より $n = 1, 2, 3 \dots$ で A_n はp^3で割り切れる。

$B_k = b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$ についても同様に…